ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΙΣΜΑ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : 4 (τέσσερις)

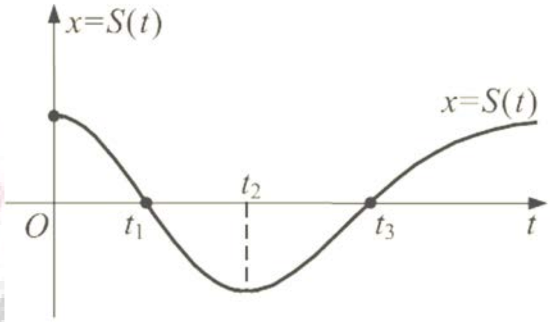
ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Μονάδες 8

Α2.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως x= S(t) ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα. Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t1 και t3, να επιλέξετε την σωστή απάντηση I,ii,iii ή iv στις παρακάτω προτάσεις.



Α. Το κινητό κινείται κατά την αρνητική φορά όταν:
- **i.** $t \in [0, t1] \cup [t3, +\infty)$
- **ii.** $t \in [0, t2]$
- **iii.** $t \in [t2, +\infty]$
- **iv.** $t \in [t1, t3]$

Β. Η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται όταν:
- **i.** $t \in [0, t1] \cup [t3, +\infty)$
- **ii.** $t \in [0, t2]$
- **iii.** $t \in [t2, +\infty]$
- **iv.** $t \in [t1, t3]$

Μονάδες 4

Α3. Τι ονομάζουμε πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Η συνάρτηση f είναι 1-1 αν και μόνο αν ισχύει $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ii. Έστω μια συνάρτηση συνεχής στο Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

iii. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β), όπου:

$$A = \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \kappa\alpha\iota \quad B = \lim_{x\to \beta^-} f(x)$$

iv. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

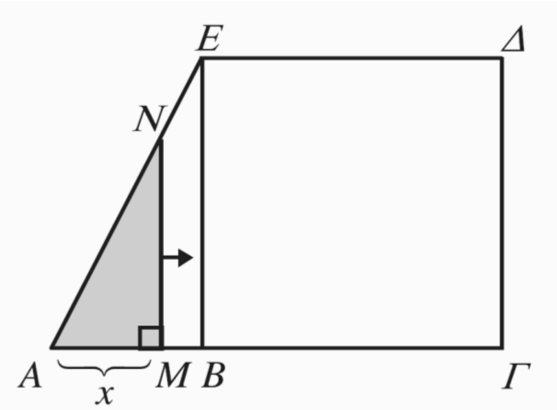
v. *Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$ τότε ισχύει:*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = 1$, $A\Gamma = 3$ και $\Gamma\Delta = 2$ και έστω η συνάρτηση f που δίνει το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x = AM$, όταν το M διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$.



Β1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f, δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \le 1 \\ 2x-1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

Μονάδες 5

Β2. Να εξετάσετε αν ορίζονται οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$

Μονάδες 5

Β3. Να βρεθεί (αν υπάρχει) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f,

i) στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = 1$

ii) η οποία διέρχεται από το σημείο $M\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

Μονάδες 5

Β4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = lnx$, με $x > 0$.

Να ορίσετε τη συνάρτηση fog και να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{f(g(x))}$.

Μονάδες 5

Β5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(x_o, y_o)$ με $x_o \in (0,1)$ στο οποίο τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $h(x) = e^{-x}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to IR$ με

- $f(1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\, \eta\mu \frac{1}{x} - 1\right)$
- $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

και η συνάρτηση g: $[1, +\infty) \to IR$ με $g(f(x) + 1) = x\ln x$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = |\ln x|$ για κάθε $x > 0$ και $g(x) = (x-1)e^{x-1}$ για κάθε $x \geq 1$.

Μονάδες 5

Γ2.

- **i.** Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f (Μονάδες 2).
- **ii.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία και τα ακρότατα της f (Μονάδες 2)
- **iii.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων , της οποίας να βρείτε την εξίσωση (Μονάδες 2).

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f και της ευθείας $y = \ln 2$

Μονάδες 4

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση

$$g\left(\frac{\ln x^e}{e^x} + 1\right) = g(x)\ \gamma\iota\alpha\ x \geq 1$$

Μονάδες 5

Γ5. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\int_2^3 xf\big(g(x)\big)e^{x-1}dx}{2e^2 - e} < \frac{\int_3^4 xf\big(g(x)\big)e^{x-1}dx}{3e^3 - 2e^2}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f: ℝ→ℝ και h: ℝ→ℝ, για τις οποίες ισχύει ότι:

- $h(x) = f\,'(x) - \frac{e^x}{e^x + 1} - 1$, $x \in \mathbb{R}$,
- $|h(x) - h(y)| \leq \frac{(x-y)^2}{2018}$, $x, y \in \mathbb{R}$,
- $h(1) = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad f(0) = \ln 2.$

Τηλ. 210 - 6216502 Info@ereisma.edu.gr

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

α. η συνάρτηση $h(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β. ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = ln(e^x + 1) + x,\ x\epsilon\mathbb{R}$.

Μονάδες 3+3

Δ2.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα και να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Αν η συνάρτηση f^{-1} έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I_1 = \int_0^1 \left((f^{-1})'(f(\chi)) - \frac{e^{-x}}{2+e^{-x}} \right) dx$$

Μονάδες 2+5

Δ3. Αν x_0 είναι η μοναδική ρίζα της συνάρτησης f και για την συνεχή συνάρτηση g ισχύει, για $x \epsilon[0,1]$:

- $\int_0^1 g^4(\mathrm{x})dx = \int_0^1 2{x_0}^2 e^{2x} g^2(\mathrm{x})dx - \int_0^1 {x_0}^4 e^{4x} dx$
- $x_0 g(x) < 0,\ για\ x\epsilon[0,1]$.

Να βρείτε την συνάρτηση g για x$\epsilon[0,1]$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I_2 = \int_0^1 f(\mathrm{x})g(\mathrm{x})dx$$

Μονάδες 8

Δ4. Για την συνάρτηση Κ: $(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f\big(K(x)\big) = lnx + ln(x-1),\quad x\epsilon(1,+\infty).$$

Να βρείτε την συνάρτηση $K(x)$.

Μονάδες 4